Wskazówka (zupełne) Korzystając równanie $\underset{P}{x}dx + \underset{Q}{y}dy = 0$

Sprawdzamy, czy równanie powyższe jest zupełne

$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ (równanie jest zupełne)

Szukamy funkcji $F(x,y)$ takiej, by $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

$$F(x,y) = \int P(x,y)dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

$\frac{\partial F}{\partial y} = g'(y)$ ale $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ więc

$$g'(y) = Q(x,y) = y$$

Całkując po y otrzymamy

$$g(y) = \int y dy$$

czyli $g(y) = \frac{y^2}{2} + C$

Zatem $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$

Uwaga

Zauważmy że równanie $xdx + ydy = 0$ można zapisać w postaci $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych więc mnożąc obie strony przez $y \cdot dx$ otrzymamy

$ydy = -xdx$ co po scałkowaniu daje

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C_1 = 0$$

Równania różniczkowe zupełne

4050. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$

4051 $\frac{x\,dy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx = 0$

4052 $e^x dx + (xe^y - 2y)dy = 0$

4053 $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 0$

4054 $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$

4055 $\frac{y + \sin x \cdot \cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx + \frac{x}{\cos^2(xy)}dy + \sin y\, dy = 0$

4056 $(1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2+y^2})y\,dy = 0$

Równania wymagające czynnika całkującego

4058 $(x^2+y)dx - x\,dy = 0$ $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$

Równania liniowe jednorodne drugiego rzędu o całkowitych współczynnikach.

1. $y'' + 4y = 0$
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$ przy warunkach początkowych $y(0) = 1$ i $y'(0) = 1$.